3.5.21 Lineární nerovnice I

Předpoklady: 030520

Pedagogická poznámka: Hodinu je důležité řídit tak, aby stihla propuknout diskuse o bodu 6 c). S vyjasněním však nespěchám, aby žáci (ti, kteří chtějí) mohli o problému přemýšlet ještě doma.

Př. 1: Zapiš množiny pomocí intervalů.
a) $A=\left\{x\in R;-3\leq x<\sqrt{6}\right\}$ b) $B=\left\{x\in R;5\leq x\right\}$ c) $C=\left\{x\in Z;3\leq x<\sqrt{10}\right\}$

a) $A=\left\{x\in R;-3\leq x<\sqrt{6}\right\}$

$A=\left\langle -3;\sqrt{6}\right)$

b) $B=\left\{x\in R;5\leq x\right\}$

$B=\left\langle 5;\infty\right)$

c) $C=\left\{x\in Z;3\leq x<\sqrt{10}\right\}$

$C=\left\{3\right\}$

Př. 2: Zápis $2(x+3)-1\leq 3x+2$ se nazývá nerovnice. Jaký je rozdíl mezi rovnicí a nerovnicí? Rozhodni dosazením, zda jsou řešením této nerovnice čísla $\left\{-2;0;1;3;5\right\}$. Odhadni, jak vypadá množina všech řešení této nerovnice.

Jiný znak mezi levou a pravou stranou $\Rightarrow$ strany se nemusí rovnat, pravá může být větší než levá.
Čísla dosadíme a uvidíme, zda nerovnice vyjde.

- $x=-2$: $2(-2+3)-1\leq 3(-2)+2$
  $2\cdot 1-1\leq -6+2$
  $1\leq -4$ $\Rightarrow$ není pravda $\Rightarrow$ číslo –2 není řešením nerovnice.
- $x=0$: $2(0+3)-1\leq 3\cdot 0+2$
  $6-1\leq 2$
  $5\leq 2$ $\Rightarrow$ není pravda $\Rightarrow$ číslo 0 není řešením nerovnice.
- $x=1$: $2(1+3)-1\leq 3\cdot 1+2$
  $2\cdot 4-1\leq 3+2$
  $7\leq 5$ $\Rightarrow$ není pravda $\Rightarrow$ číslo 1 není řešením nerovnice.
- $x=3$: $2(3+3)-1\leq 3\cdot 3+2$
  $2\cdot 6-1\leq 9+2$
  $11\leq 11$ $\Rightarrow$ pravda $\Rightarrow$ číslo 3 je řešením nerovnice.

- $x = 5$: $2(5+3)-1 \le 3\cdot 5+2$
  $2\cdot 8-1 \le 15+2$
  $15 \le 17$ $\Rightarrow$ pravda $\Rightarrow$ číslo 5 je řešením nerovnice.

Čísla menší než 3 nebyla řešením, číslo větší než 3 je řešením a pro číslo 3 se rovnaly obě strany nerovnice $\Rightarrow$ zdá se, že řešením je interval $\langle 3;\infty)$.

Pedagogická poznámka: Když v zadání nebylo přímo uvedeno "rozhodni dosazením", žáci spontánně řešili úlohu jako rovnici pomocí ekvivalentních úprav.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu se snažím, aby žáci volili co nejrůznější čísla, v rámci třídy jich tak dokážeme vyzkoušet docela slušný počet.

Př. 3: Zvol číslo, pro které by nerovnice vyjít měla a vyzkoušej, zda opravdu vyjde.

Zdá se, že řešením je interval $\langle 3;\infty)$ $\Rightarrow$ volíme číslo větší než 3: $x = 4$.

$x = 4$: $2(4+3)-1 \le 3\cdot 4+2$
$2\cdot 7-1 \le 12+2$
$13 \le 14$ $\Rightarrow$ pravda $\Rightarrow$ číslo 4 je řešením nerovnice.

Př. 4: Zvol číslo, pro které by nerovnice vyjít neměla a vyzkoušej, zda opravdu nevyjde. Můžeme se dosazováním přesvědčit o tom, že jsme řešení nerovnice odhadli správně?

Zdá se, že řešením je interval $\langle 3;\infty)$ $\Rightarrow$ volíme číslo menší než 3: $x = 2$.

$x = 2$: $2(2+3)-1 \le 3\cdot 2+2$
$2\cdot 5-1 \le 6+2$
$9 \le 8$ $\Rightarrow$ není pravda $\Rightarrow$ číslo 2 není řešením nerovnice.

Obě kontroly dosazováním sice vyšly, ale o správnosti našeho odhadu jsme se zcela jistě nepřesvědčili, protože chybí vyzkoušet ještě nekonečně mnoho dalších čísel, pro která nerovnice vyjít měla, a nekonečně mnoho čísel, pro která by vyjít neměla.

Co když se dosazováním netrefíme? Jak řešit nerovnice?
U rovnic jsme pomocí ekvivalentních úprav postupně zjednodušovali rovnici, abychom se dostali k nejjednoduššímu tvaru, ze kterého je řešení zcela zřejmé $\Rightarrow$ zkusíme stejným způsobem postupně zjednodušovat naši nerovnici a uvidíme, zda se nám ukáže řešení podobně jako u rovnic.

$2(x+3)-1 \le 3x+2$
$2x+6-1 \le 3x+2$
$2x+5 \le 3x+2 \quad /-2$
$2x+3 \le 3x \quad /-2x$
$3 \le x$ $\Rightarrow$ řešením je opravdu interval $\langle 3;\infty)$.

Př. 5: Zapiš řešení nerovnic.

a) $x \geq 3$ b) $x < -10$ c) $x > -\frac{\sqrt{2}}{7}$ d) $x \leq 2\pi$

a) $x \geq 3$ $K = \langle 3; \infty)$

b) $x < -10$ $K = (-\infty; -10)$

c) $x > -\frac{\sqrt{2}}{7}$ $K = \left(-\frac{\sqrt{2}}{7}; \infty\right)$

d) $x \leq 2\pi$ $K = (-\infty; 2\pi\rangle$

Pedagogická poznámka: První dvě nerovnice jsou tak přehledné, že většina žáků je schopná najít řešení z hlavy. Rozhodně tomu nebráním, naopak uvádím jako štěstí, že jsme schopni řešení kontrolovat úvahou (a tak se utvrdit v tom, že používání ekvivalentních úprav dává smysl).

Pedagogická poznámka: Bod c) řešíme až při kontrole, během počítání na něj v lavicích neupozorňuji. Spíš poté, co problém vyhřezne při kontrole, připomínám, že je třeba si výsledky kontrolovat nějakým výpočtem a v nejhorším případě alespoň se zeptat souseda, zda k něčemu dospěl.

Př. 6: Vyřeš nerovnice pomocí ekvivalentních úprav. Své řešení ověř dosazením čísla, který by vyjít mělo a dosazením čísla, které by vyjít nemělo.

a) $x - 2 > 3$ b) $x + 4 < -2$ c) $-x < 3$ d) $2x + 4 \geq 0$

a) $x - 2 > 3 \quad / + 2$

$x > 5$ $K = (5; \infty)$

Ověření:

- $x = 6:\ 6 - 2 = 4 > 3$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = 4:\ 4 - 2 = 2 > 3$ v pořádku, nemělo vyjít a nevyšlo.

b) $x + 4 < -2 \quad / - 4$

$x < -6$ $K = (-\infty; -6)$

Ověření:

- $x = -7:\ -7 + 4 = -3 < -2$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = 10:\ 10 - 2 = 8 < -2$ v pořádku, nemělo vyjít a nevyšlo.

c) $-x < 3$

Problém: dva možné postupy.

Přičítání:

$-x < 3 \quad / + x$

$0 < 3 + x \quad / - 3$

$-3 < x$ $K = (-3; \infty)$

Násobení:

$-x < 3 \quad / \cdot (-1)$

$x < -3$ $K = (-\infty; -3)$

Test možné správnosti:
$x = 1$: $-1 < 3$ (mělo vyjít a vyšlo)
$x = -4$: $-(-4) = 4 \not< 3$ (nemělo vyjít a nevyšlo)

Test možné správnosti:
$x = -5$: $-(-5) = 5 \not< 3$ (mělo vyjít a nevyšlo)
$x = 4$: $-4 < 3$ (nemělo vyjít a vyšlo)

Proč oba postupy vedou k různým výsledkům? Proč je špatný (nevychází zkouška) postup, ve kterém násobíme? Více příští hodinu.

d) $2x + 4 \geq 0 \quad / -4$
$2x \geq -4 \quad / : 2$
$x \geq -2 \qquad K = \langle -2; \infty)$
Ověření:
- $x = 0$: $2 \cdot 0 + 4 = 4 \geq 0$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = -3$: $2 \cdot (-3) + 4 = -2 \geq 0$ v pořádku, nemělo vyjít a nevyšlo.

Shrnutí: O tom, zda je určité číslo řešením nerovnice, můžeme rozhodnout dosazením.